

文章编号: 1000 8055(2008)11-2021-05

随机响应面法在结构随机响应计算中的应用

郭秩维, 白广忱

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 传统的响应面方法以一般多项式逼近结构的随机响应, 但这种方式并不能保证收敛性. 以随机多项式为基础的随机响应面方法, 可以弥补这一不足. 两个数值例子和一个发动机轮盘实例来验证这一方法的有效性. 结果表明: 随着随机多项式次数的增加, 随机响应面所得到的响应概率密度曲线愈加趋近于由蒙特卡罗方法所得到的概率密度曲线.

关 键 词: 随机响应面; 航天结构; 不确定性; 随机多项式

中图分类号: V 231. 95; TB114. 3

文献标识码: A

Application of stochastic response surface method in the structural stochastic response

GUO Zhi wei, BAI Guang chen

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Classical response surface method approaches the structural stochastic response using a group of general polynomials, but this method can not guarantee convergence. Stochastic response surface method can compensate the drawback of the classical response surface. Two numerical examples and a practical example of an aero engine disk were presented herein to validate stochastic response surface method. The results show that, with the increasing order of polynomial chaos, the probability density curve of a response approaches the results from Monte Carlo simulations.

Key words: stochastic response surface; aerospace structure; uncertainty; polynomial chaos

人们对现代结构的设计不仅要求设计出的结构在常规使用状态下不发生失效, 而且要求在某些非常规状态下, 仍能保证安全性. 这就对结构的设计提出了更为苛刻的要求, 并且需要更先进的设计方法来支撑这一理念. 因此对结构由于载荷、材料等不确定性所引起的结构响应的不确定性的评价方法就显得尤为重要. 到目前为止, 许多概率分析方法已经被应用到了结构响应的不确定分析中, 比较常见的方法有: 蒙特卡罗方法、随机有限

元方法、响应面方法以及神经网络方法等. 蒙特卡罗方法, 是目前公认的结构不确定性分析的经典方法. 它的特点是模型精度高, 常常被用来衡量其它方法计算结果的准确程度, 并且蒙特卡罗方法易于和现有的有限元分析软件相结合, 因此在工程实践中得到广泛的应用. 但蒙特卡罗方法也具有先天的内在不足, 其模型的高精度是以大量的仿真试验为代价的, 因此也被公认为一种费时的分析方法. 随机数学的蓬勃发展, 使得从分析的角

收稿日期: 2008 04 14; 修订日期: 2008 05 26

作者简介: 郭秩维(1981-), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 主要从事结构、机构可靠性研究.

度得到结构响应的统计规律成为可能. 随机有限元方法就是在确定性有限元基础上发展起来的以理论分析为基础、数值求解为手段的结构不确定性分析方法. 从理论背景来考虑, 确定性有限元方法研究的是在给定物理域内的微分方程问题, 而随机有限元方法则是研究在给定物理域内的随机微分方程问题. 因此随机有限元方法是确定性有限元理论与随机分析理论相结合的产物, 目前比较常见的方法有^[1-5]: 摄动有限元方法(Perturbation method)、纽曼展开方法(Neumann expansion method)、谱有限元方法(Spectral method)等. 随机有限元方法使从理论上求解随机结构的响应问题成为可能, 但是由于上面提到的方法本身的缺陷以及实际结构的复杂性, 使得随机有限元方法尚不能像确定性有限元方法那样处理复杂的结构响应问题, 而仅仅局限于比较简单的问题, 而且目前以随机有限元为理论基础的商业软件尚不多见, 这也限制了这种方法在工程上的应用. 响应面方法分为局部响应面方法和全局响应面方法, 而全局响应面方法也被称为代理模型(Surrogate model), 是指计算量小、但计算结果与高精度模型的计算结果相近的分析模型. 在结构分析过程中, 响应面方法常常被用来替代原有的物理模型, 以克服由于考虑不确定性问题所带来的仿真计算量过大的问题. 目前工程中所采用的响应面模式是基于多项式的回归模型, 其中以二次多项式回归模型为主, 这种模型的优点是使用简单, 计算量小, 但同时也存在很多的不足^[6]: ①多项式模型的自适应能力不足, 其模型的准确性很大程度上取决于样本点的选择; ②多项式模型的柔性不足, 遇到非线性程度强烈的情况会出现很大的误差. 神经网络方法也可称为一种代理模型, 它是现在研究和应用中非常活跃的一个领域, 特别对那些复杂的、高度非线性问题的分析, 越来越多的学者倾向于用神经网络方法进行分析. 但是对于神经网络的支持者和使用者常常容易忽视一个问题是神经网络的过拟和问题(Overfitting problem)^[7-8], 即神经网络对历史数据或者训练的数据能提供很好的拟和结果, 而对新的数据确不能够拟和的很好. 神经网络只能是对响应面方法的补充, 而不能取代响应面方法, 因为神经网络方法最多只能给出一个预测模型, 不能给出对所描述模型的更为深刻的见解. 而且, 也没有足够的理由相信由神经网络获得的结果优于那些经过缜密设计的响应面方法获得的结果^[8]. 因此, 从理论上需要

找到一种形式和响应面方法一样简单, 而且对结构的随机响应具有高精度逼近的方法, 这种方法就是本文提到的随机响应面方法(Stochastic response surface method).

1 随机响应面方法

1.1 随机响应面方法介绍

“随机响应面方法”这一名词, 从现有的文献资料上来看, 最早是由美国的 Isukapalli 博士于 1998 年在对环境和生物系统中的不确定性问题的研究中所提出来的^[9-10]. 而他的学术灵感则来源于 Ghanem 博士和 Spanos 博士对随机有限元的研究工作^[5]. 从数学的理论背景来看, 随机响应面方法的影子最早可追溯到数学家 Wiener 对布朗运动的研究. 在他对布朗运动的随机过程的理论研究中, 提出了“齐次随机函数(Homogeneous chaos)”^[11](这里的 chaos 的概念是指随机性, 与非线性动力系统混沌是不一样的, 本文将 chaos 译为随机性, 而 chaos 作为混沌的意思被提出则是在 Wiener 提出齐次随机的 37 年后, 由 Yorke 首先提出的^[12]). 根据 Wiener 对齐次随机函数的定义, 它是正交的 Hermite 多项式函数所张成的集合, 而随机多项式(Polynomial chaos)则是齐次随机函数集合中的元素. 以一维问题为例, 考虑定义在实数轴 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上带有 Gauss 测度的函数

$$\mathcal{U}(dx) = \varrho(x) dx, \quad \varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

其中 dx 表示 Lebesgue 测度, $\mathcal{U}(dx)$ 表示在 dx 上的测度. 定义以 Gauss 测度的平方可积函数空间为

$$L^2(\mathbf{R}, \mathcal{U}) = \left\{ f(x), \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \mathcal{U}(dx) < \infty \right\} \quad (2)$$

在 $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{U})$ 上的内积定义为

$$(f, g)_{\mathcal{U}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \mathcal{U}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \varrho(x) dx \quad (3)$$

设 $\{H_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是 Hermite 多项式函数所组成的集合, 则齐次随机函数所组成的集合可表示为: $\left\{ \sum_{i=0}^n f_i H_i(x), n = 0, 1, 2, \dots \right\}$. 根据 Cameron Martin 定理^[13]: 在 $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{U})$ 空间中, 对于任意一个函数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R}, \mathcal{U})$, 存在一个 Fourier-Hermite 展开, 使得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_n(x) \quad (4a)$$

其中 f_n 为系数, 定义为

$$f_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) \mu(dx) = (f(x), H_n(x))_{\mu} \quad (4b)$$

即 f_n 为 $f(x)$ 在 $H_n(x)$ 上的投影. 从上面的分析可知: 任意来自 $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ 的函数可由 Hermite 多项式函数来近似. 当 x 以标准正态变量 ξ 所表示时, 公式(4a)可表示为

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n(\xi) \quad (4c)$$

而对于 $\mathbf{R}^d$ 空间上的, 定义在 $L^2(\mathbf{R}^d, \mu^d)$ 上的函数也有类似一维情况时的结论, 即任意定义在 $\mathbf{R}^d$ 空间上的随机变量 $u(\theta)$, 可表示为

$$\begin{aligned} u(\theta) = & a_0 H_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} H_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} H_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} H_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \\ & \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} H_4(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \\ & \xi_{i_3}(\theta), \xi_{i_4}(\theta)) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_d]$ 表示 d 个独立的标准正态随机变量所组成的向量, $H_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 表示以 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 为变量的 Hermite 多项式, 可写为

$$H_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = (-1)^n \frac{\partial^n e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \quad (6)$$

1.2 随机响应面法与传统响应面法的区别

从形式上看, 随机响应面方法和传统的响应面方法很相近, 都是用一组多项式函数来近似或逼近未知函数. 但实质上二者有根本的不同. 以一维问题为例, 对于传统的响应面方法, 我们会选取这样一组多项式 $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$. 以取前四项为例, 则响应函数可写为

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (7)$$

从理论上讲 $\{x^i, i = 0, 1, \dots, n\}$ 并不是 $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ 上的一组基, 因此用 $\{x^i, i = 0, 1, \dots, n\}$ 去逼近 $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ 中的元素具有一定的任意性, 而且从数值分析的角度, 以 $\{x^i, i = 0, 1, \dots, n\}$ 为基底常常带来求解方程时系数矩阵是病态的. 而以 Hermite 多项式为基底, 公式(7)可写为

$$y = b_0 H_0(x) + b_1 H_1(x) + b_2 H_2(x) + b_3 H_3(x) \quad (8)$$

从上面的分析知道, 以 Hermite 多项式为基底可以逼近 $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ 上任意一个元素, 即当次数越高时, 逼近误差越小. 这从理论上保证了在 $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ 空间中通过以 Hermite 多项式为基底构造响应面逼近随机函数可以在概率意义下保证收敛性, 而传统的响应面方法不能保证这一点.

2 数值分析

这里以两个数值例子来验证随机响应面方法的收敛性. 其中例 1 是单一随机变量的情况, 例 2 是多个随机变量的情况(以两个变量为例), 这两个例子都以高度非线性指数函数为参考.

例 1: $y = e^x$, 其中 x 为正态随机变量, 满足 $x \sim N(0, 0.4^2)$. 根据随机响应面方法, 构造的以标准正态随机变量 ξ 为变量的 $y = e^x$ 的二次和三次随机函数为

$$y_2^{(1)} = 1.0833 + 0.4328\xi + 0.0833(\xi^2 - 1) \quad (9)$$

$$y_3^{(1)} = 1.0843 + 0.4333\xi + 0.0863(\xi^2 - 1) + 0.0112(\xi^3 - 3\xi) \quad (10)$$

因为 $y = e^x$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上是单调递增函数, 可以由概率论的知识得到随机函数 $y = e^x$ 的解析形式的概率密度表达式. 根据上面的公式(9)和(10), 并利用 Matlab 中的统计工具箱中的命令函数, 编程得到对应公式(9)和(10)的响应的概率密度曲线. 图 1 给出了一维指数函数情况下的解析解、蒙特卡罗数值解以及二次和三次随机响应面方法得到的结果的对比. 通过对比可看到, 随着随机多项式次数的增加, 随机响应面方法得到的响应的概率密度曲线越来越趋近于真实解.

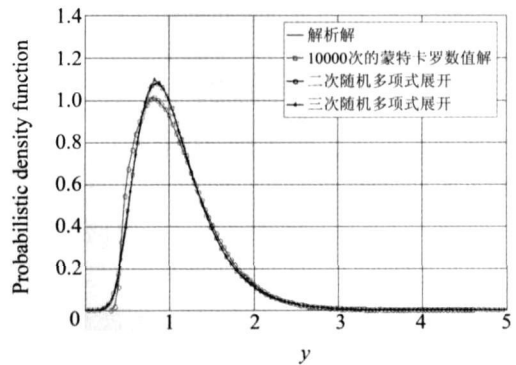


图 1 一维随机指数函数的比较

Fig. 1 Comparisons of one dimension stochastic exponential function

例 2: $y = e^{x_1 + x_2}$, 其中 x_1 和 x_2 为正态随机变量, $x_1 \sim N(2.0, 1.0^2)$, $x_2 \sim N(4.0, 0.5^2)$. 根据随机响应面方法, 构造的以标准正态随机变量

ξ_1, ξ_2 为变量的 $y = e^{x_1+x_2}$ 的二次和三次随机函数为

$$y_2^{(2)} = 714.5655 + 807.2563\xi_1 + 518.7429\xi_2 + 325.9495(\xi_1^2 - 1) + 122.1409(\xi_2^2 - 1) + 360.1899\xi_1\xi_2 \tag{11}$$

$$y_3^{(2)} = 746.6790 + 750.8548\xi_1 + 451.7081\xi_2 + 326.5573(\xi_1^2 - 1) + 56.0228(\xi_2^2 - 1) + 234.7863\xi_1\xi_2 + 98.7557(\xi_1^3 - 3\xi_1) + 255.7056(\xi_2^3 - 3\xi_2) + 86.4245(\xi_1\xi_2^2 - \xi_1) + 14.1787(\xi_1^2 - 3\xi_1) \tag{12}$$

对于二维情形, 以蒙特卡罗方法得到的响应的概率密度曲线为参考, 图 2 给出了二次和三次随机响应面得到的结果与蒙特卡罗方法得到的结果的对比图. 与一维情况类似, 从图 2 可以看到随着随机多项式次数的增加, 随机响应面方法得到的响应的概率密度曲线越来越趋近于以蒙特卡罗方法得到的参考解.

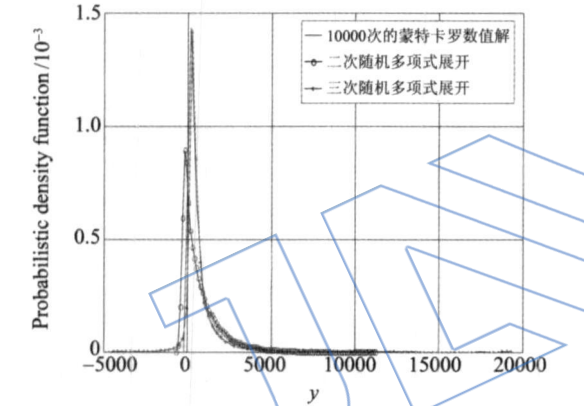


图 2 二维随机指数函数的比较

Fig. 2 Comparisons of two dimension stochastic exponential function

3 发动机压气机算例

本文的分析采用 WP7 发动机的 II 级压气机盘作为实际算例, 并对结构作了简化, 如图 3 所示. 表 1 给出了考虑的随机变量, 及其对应的数字特征.

图 4 给出了不同方法得到的轮盘上某点应力的概率密度曲线. 从中可以看出随着多项式展开次数的增加, 随机响应面方法得到的响应的概率密度曲线趋近于由蒙特卡罗方法给出的参考解. 这说明随机响应面方法在概率意义上能够保证模型的收敛性. 同时与传统响应面方法一样, 基于多项式的仿真计算要比基于有限元模型的计算时间更短, 这样无疑提高了计算的效率, 并且保证了计

算的精度.

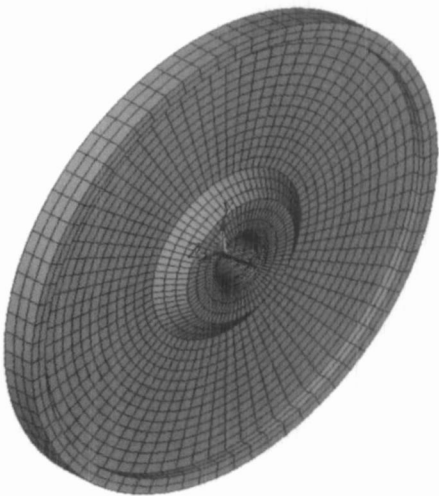


图 3 简化的 WP7 压气机盘
Fig. 3 Simplified WP7 compressor disk

表 1 随机变量分布表
Table 1 Distribution of random variables

变量名称	分布类型	均值	方差
密度 / (t/mm ³)	正态分布	7.8 × 10 ⁻⁹	3.9 × 10 ⁻¹⁰
轮盘转速 ω / (r/min)	正态分布	13 375.8	1337.6
弹性系数 E / MPa	正态分布	2.1 × 10 ⁵	1.05 × 10 ⁴

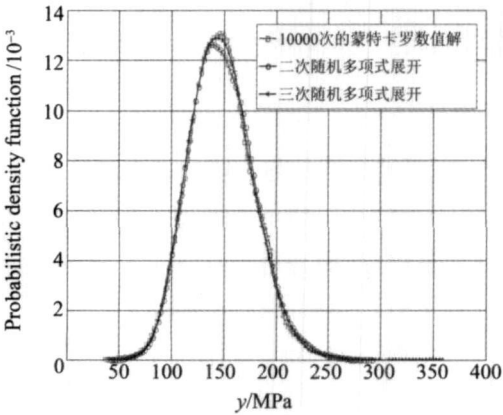


图 4 轮盘某点的应力的概率密度曲线对比
Fig. 4 Comparison of probabilistic density functions of stress

4 结 论

通过上面的两个数值算例和一个工程实例, 对于结构的随机响应面方法而言, 随着随机多项式次数的增加, 近似的概率密度曲线越来越趋近于真实的解, 即在概率意义上, 验证了随机响应面

方法的收敛性. 并且这种收敛性, 在数学意义下是有保证的, 因此它相比传统的响应面方法在理论上更为可靠, 是一种潜在的实用工程方法.

参考文献:

- [1] Ghanem R, Spanos P D. Polynomial chaos in stochastic finite elements [J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(1): 197-202.
- [2] Schuëller G I. A state of the art report on computational stochastic mechanics [J]. Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, 1997, 12(4): 197-313.
- [3] Shinozuka M, Deodatis G. Response variability of stochastic finite element systems [J]. Stochastic Mechanics, 1986, (1): 215-222.
- [4] Matthies H G, Brenner C E, Bucher C G, et al. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids: stochastic finite elements [J]. Structural Safety, 1997, 19(3): 283-336.
- [5] Ghanem R, Spanos P D. Stochastic finite element: a spectral approach [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [6] Hurdo J E, Alvarez D A. Neural network based reliability analysis: A comparative study [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191: 113-132.
- [7] JIN Long, KUANG Xueyuan, HU ANG Haihong, et al. Study on the overfitting of the artificial neural network forecasting model [J]. Acta Meteorologica Sinica, 2005, 19(2): 216-225.
- [8] Myers R H, Montgomery D C. Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments [M]. Wiley, 2002.
- [9] Isulapalli S S, Roy A, Georgopoulos P G. Stochastic response surface methods for uncertainty propagation: application to environmental and biological systems [J]. Risk Analysis, 1998, 18(3): 351-363.
- [10] Isukapalli S S, Balakrishnan S. Computationally efficient uncertainty propagation and reduction using the stochastic response surface method [C] // IEEE Conference on Decision and Control. 2004: 2237-2243.
- [11] Wiener N. The homogeneous chaos [J]. Amer. J. Math., 1938, (60): 897-936.
- [12] Li T Y, Yorke J A. Period three implies chaos [J]. Amer. Math., 1975, (82): 985-992.
- [13] Cameron R, Martin W. The orthogonal development of nonlinear functional in series of Fourier Hermite functional [J]. Ann. Math., 1947, 48: 385.